Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 3

Ausgabe: 06.11.2023
Abgabe: 13.11.2023, 23:55 Uhr

Aufgabe 3.1. *Rekonstruktion eines Abends* $(8 + 1 + 4 = 13$ Punkte$)$

An einem verregneten Samstag wacht die Informatikstudentin Alice auf und kann ihr Handy nicht finden. Schnell überzeugt sie sich davon, dass sie es bereits am Vorabend verloren haben muss. Leider kann sie sich nicht vollständig an die Abläufe des vorherigen Abends erinnern. Sicher ist, dass sie nach einer langen Woche intensiven Lernens nicht ohne einen kleinen Umweg nach Hause gefahren ist, sondern ein oder mehrere Lokale in der Nähe des Campus besucht hat. Infrage kommen hierfür das *Café Extrablatt*, der legendäre *Doctor Flotte*, die *Volkswirtschaft* oder der *Tannenbaum.* Alice vermutet, dass sich ihr Handy in einem der am Vorabend besuchten Lokale befindet.

Nach intensiven Überlegungen kommt sie zu folgenden (wahren) Erkenntnissen:

1) Sie erinnert sich daran, in die Jordanstraße abgebogen zu sein. Das kann nur heißen, dass sie die *Volkswirtschaft* oder den *Tannenbaum* besucht hat. Vielleicht auch beide.

2) Wäre sie sowohl im *Café Extrablatt* als auch in der *Volkswirtschaft* gewesen, hätte sie sicherlich an beiden Orten etwas gegessen. Da sie mittlerweile hungrig ist, kann sie höchstens in einem der beiden Lokale gewesen sein.

3) Sie hat ihr gesamtes Bargeld ausgegeben. Entweder war sie im *Café Extrablatt*, wo sie immer etwas mehr Geld ausgibt, oder sie hat ihr Geld am Flipperautomaten im *Tannenbaum* verjubelt. Da sie nicht besonders viel Geld dabei hatte, kann sie höchstens eines der beiden Lokale besucht haben.

4) Nur wenn sie vorher das *Café Extrablatt* besucht hat, hätte sie genug Mut für einen Besuch bei *Doctor Flotte* gehabt.

Rekonstruieren Sie, welche Lokale Alice am Vorabend besucht hat:

a) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ auf, die die einzelnen obigen Erkenntnisse beschreiben. Verwenden Sie dabei die Variablen **C** (gibt an, ob das *Café Extrablatt* besucht wurde), **D** (gibt an, ob *Doctor Flotte* besucht wurde), **T** (gibt an, ob der *Tannenbaum* besucht wurde) und **V** (gibt an, ob die *Volkswirtschaft* besucht wurde).

b) Konstruieren Sie eine Formel φ, die ausdrückt, dass alle vier Erkenntnisse wahr sind.

c) Bestimmen Sie alle erfüllenden Belegungen von φ. Kann damit zweifelsfrei rekonstruiert werden, welche Lokale am Vorabend von Alice besucht wurden? Kann die Suche andernfalls eingegrenzt werden, indem zumindest für einige Lokale ein Besuch zweifelsfrei nachgewiesen oder ausgeschlossen werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Überprüfen Sie am Ende, ob Ihre Antwort tatsächlich mit den vier Erkenntnissen konsistent ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.2. *Erfüllbarkeit, Tautologien, Widersprüche* $(3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$ Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig,
- unerfüllbar oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar

ist. Ihre Antwort können Sie jeweils durch die Angabe einer entsprechenden Wahrheitstafel oder strukturell begründen. Bei Formeln, die erfüllbar und falsifizierbar sind, genügt die Angabe einer erfüllenden sowie einer falsifizierenden Belegung.

i) $\varphi_1 := (\neg \mathbf{1} \vee Q) \wedge (Q \to \mathbf{0})$

ii) $\varphi_2 := Y \to \Big(X \to \big(X \to (Y \to X)\big)\Big)$

iii) $\varphi_3 := \bigwedge_{i=1}^{127} (V_i \to V_{i+1}) \wedge (\neg V_1 \to \neg V_{128})$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}) = \mathrm{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := (A \to B) \leftrightarrow (B \vee A)$

ii) $\psi_2 := \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} ((V_i \oplus V_{i+1}) \oplus V_i)\Big)$, wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Aufgabe 3.3. *Semantische Folgerungen und Äquivalenzen* $(5 \times 2 = 10$ Punkte)

Seien φ, ψ, σ beliebige aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) $((\varphi \to \psi) \oplus (\psi \to \sigma)) \models (\varphi \vee \sigma)$

b) $(((\neg\psi \vee \sigma) \wedge \varphi) \wedge (\psi \vee \neg\sigma)) \equiv (\varphi \wedge (\psi \leftrightarrow \sigma))$

c) $(((\sigma \wedge \psi) \vee \neg\varphi) \to ((\varphi \oplus \psi) \wedge \sigma)) \models ((\sigma \wedge \psi) \vee \varphi)$

d) $((\psi \oplus \varphi) \leftrightarrow \neg\sigma) \models ((\psi \vee \sigma) \wedge (\varphi \vee \sigma))$

e) $((\varphi \to \sigma) \oplus \neg\psi) \equiv ((\varphi \oplus \psi) \vee \sigma)$

Für den Beweis einer Behauptung können Sie z.B. anhand einer Wahrheitstafel ihre Allgemeingültigkeit begründen. Zum Widerlegen einer Behauptung genügt die Angabe einer entsprechenden Belegung mit einer kurzen Begründung.

Hinweis: Die Angabe einer Wahrheitstafel ist ohne weitere Begründung nicht ausreichend. Stellen Sie in jedem Fall die Nachvollziehbarkeit sicher, indem Sie Zwischenschritte (Teilformeln) angeben.
Als Alternative zu Wahrheitstafeln können Sie auch die Äquivalenzen aus Satz 3.34 des Skriptes verwenden, um eine Aussage durch Umformungen zu beweisen.

Aufgabe 3.4. *Vollständigkeit* (3 × 4 = 12 Punkte)

Sei $\mathcal{O} := \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\}$ die Menge aller aussagenlogischen *Konstanten* und *Junktoren*. Für jedes $S \subseteq \mathcal{O}$ sei $\mathrm{AL}_S \subseteq \mathrm{AL}$ die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln, in denen – neben Klammern und den Variablen – nur die Konstanten und Junktoren aus S vorkommen. Wir nennen S *vollständig*, falls wir für jedes $\varphi \in \mathrm{AL}$ ein $\varphi' \in \mathrm{AL}_S$ mit $\varphi \equiv \varphi'$ finden können.

Beispielsweise ist $S = \{\neg, \vee, \wedge\}$ vollständig[1]. Um die Vollständigkeit einer Teilmenge $R \subseteq \mathcal{O}$ nachzuweisen, müssen also nur die Junktoren $\neg, \vee$ und $\wedge$ mithilfe der Konstanten und Junktoren in R ausgedrückt werden.

a) Zeigen Sie: $T = \{\mathbf{1}, \rightarrow, \oplus\}$ ist vollständig.

   Hinweis: Wie können Sie die Negation $\neg\varphi$ ausdrücken?

b) Zeigen Sie: $U = \{\mathbf{0}, \leftrightarrow\}$ ist nicht vollständig.

   Hinweis: Wie sehen Formeln aus AL_U aus? Benutzen Sie Assoziativität und Kommutativität für $\leftrightarrow$.

c) Finden Sie eine möglichst kleine Obermenge $\widetilde{U} \supseteq U$, sodass $\widetilde{U}$ vollständig ist, und weisen Sie die Vollständigkeit nach.

[1] *Den Beweis dafür liefert bereits Satz 3.34 im Skript. In Teil (h) wird gezeigt, wie die beiden Konstanten* $\mathbf{0}$ *und* $\mathbf{1}$ *durch* $\neg, \vee, \wedge$ *ausgedrückt werden können; in Teil (k) bzw. (l) dasselbe für die Implikation, Biimplikation und XOR.*