Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 5

Ausgabe: 20.11.2023
Abgabe: 04.12.2023, 23:55 Uhr

In der Woche 27.11. bis 01.12. finden **keine Vorlesungen** und auch **keine Tutorien** statt. Außerdem wird es in der Woche **kein neues Übungsblatt** geben.
Übungsblatt 4 wird in der darauffolgenden Woche (04.12. bis 08.12.) in den Tutorien besprochen.
Die **zweiwöchige Abgabefrist für Übungsblatt 5** endet am 04.12.2023 um 23:55 Uhr.

Aufgaben, deren Punktzahl mit einem Stern versehen ist, sind Bonusaufgaben, für die es Bonuspunkte gibt. Bonuspunkte zählen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl hinzu.

Aufgabe 5.1. *Resolution* $((2 + 4) + 4 + 3 = 13$ Punkte)

In den Aufgabenteilen b) und c) genügt jeweils eine graphische Lösung. Erzeugen Sie keine unnötigen Terme, die Sie in der weiteren Resolution nicht benötigen.

a) Die Resolution basiert formal auf der korrekten Schlussregel $\{C \cup \{X\}, D \cup \{\neg X\}\} \vdash C \cup D$, die, wie in der Vorlesung gezeigt, auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{C \cup \{X\} \quad D \cup \{\neg X\}}{C \cup D}$$

Korrekt heißt hierbei, dass für jede Formelmenge Φ und Formel φ gilt: Falls $\Phi \vdash \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$. Nur auf dieser Basis können mithilfe der Resolution Beweise für die Unerfüllbarkeit von Formeln geführt werden können.

i) Um Schritte zu sparen, wird häufig die folgende vermeintliche „Abkürzung" versucht:

$$\frac{C \cup \{X, Y\} \quad D \cup \{\neg X, \neg Y\}}{C \cup D}$$

Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass diese Regel *nicht* korrekt ist.

ii) Um zwei Variablen auf einmal zu eliminieren, muss stattdessen die folgende Regel angewandt werden:

$$\frac{C_1 \cup \{X, Y\} \quad C_2 \cup \{X, \neg Y\} \quad C_3 \cup \{\neg X, Y\} \quad C_4 \cup \{\neg X, \neg Y\}}{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4}$$

Zeigen Sie, dass diese Regel korrekt ist.

b) Zeigen Sie mit Resolution, dass die folgende KNF-Formel ψ unerfüllbar ist.

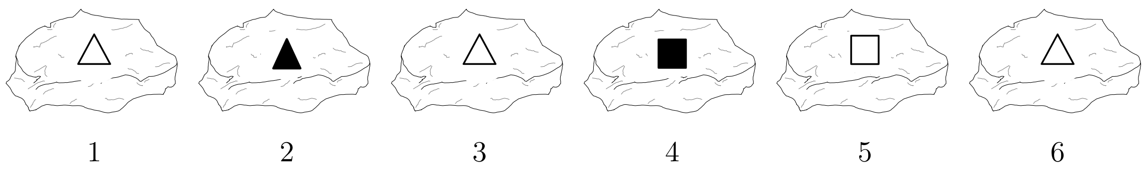
$$\psi := (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (D \vee A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge B \wedge (D \vee B) \wedge (\neg D \vee A \vee \neg B \vee C)$$

c) Leiten Sie mittels Resolution den leeren Disjunktionsterm ε aus der Menge K her.

$$K := \Big\{\{Z, Y\}, \{X, \neg Z\}, \{Z, \neg Y\}, \{\neg Z, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}\Big\}$$

Aufgabe 5.2. *Implikationen, Negationen und Quantoren* $(3 + (3 \times 2) + 3 = 12$ Punkte)

a) Ein Expeditionsteam findet in einem antiken Tempel sechs Steintafeln. Die Steintafeln sind jeweils auf der Vorder- und Rückseite bemalt. Auf den beiden Seite ist jeweils entweder ein Quadrat (in schwarz oder weiß) oder ein Dreieck (ebenfalls in schwarz oder weiß) gemalt. Das Expeditionsteam sieht die Steintafeln wie in der folgenden Abbildung dargestellt vor sich.



Das Expeditionsteam möchte überprüfen, ob die folgende Aussage wahr ist:

> *„Für jede Steintafel gilt: Ist auf einer Seite der Steintafel ein schwarzes Quadrat, dann ist auf der anderen Seite ein weißes Dreieck oder ein schwarzes Quadrat.“*

Um die Steintafel so wenig wie möglich zu beschädigen, sollten sie auf keinen Fall unnötig bewegt werden. Die Variante, einfach alle sechs Steintafeln umzudrehen, kommt also nicht in Frage, um den Wahrheitsgehalt der Aussage zu überprüfen.

Welche Steintafeln *müssen* umgedreht werden, um die Aussage zu überprüfen?

b) Betrachten Sie eine Färbung $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ der natürlichen Zahlen. Die beiden folgenden Aussagen über f seien wahr:

- Für jede blau gefärbte Zahl gibt es eine *mindestens doppelt so große* rot gefärbte Zahl.
- Es gibt *mindestens eine* rot gefärbte Zahl.

Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese immer wahr oder immer falsch ist oder weder das eine noch das andere zutrifft. Beweisen Sie dabei die wahren Aussagen und widerlegen Sie die falschen. Geben Sie zu den übrigen Aussagen je ein Positivbeispiel einer Färbung f_+ an, welche die Aussage erfüllt, und ein Gegenbeispiel f_- einer Färbung, welche die Aussage nicht erfüllt.

i) Es gilt $f(1) = \text{blau}$.
ii) Die Menge $f^{-1}(\text{rot})$ ist unendlich.
iii) Wenn $f(1) = \text{blau}$ gilt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass gilt: $f(n) = \text{blau}$, $f(n+1) = \text{rot}$.

c) Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen umgangssprachlich. Dabei soll die Negation möglichst weit in die Aussage hineingezogen werden. Es sind keine Begründungen notwendig.

i) Alle Hunde, die bellen, beißen nicht.
ii) Wenn es Zitronen gibt, machen alle Menschen keine Limonade.
iii) Für jeden Menschen gilt: Entweder er ist seines Glückes Schmied oder er schmiedet das Eisen, solange es heiß ist.

Aufgabe 5.3. *Beweise* $(3 + 4 + (4 + 5 + 6^*) = 16$ Punkte + 6 Bonuspunkte)

a) Zeigen Sie, dass der goldene Schnitt $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine irrationale Zahl ist. Sie dürfen dabei annehmen, dass $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist.

Hinweis: Ein indirekter Beweis bietet sich an.

b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton, d.h. $f(a) \leq f(b)$ gelte für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$.
Zeigen Sie: Wenn f injektiv ist, dann ist $f(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Ein indirekter Beweis bietet sich an.
Das Schubfachprinzip (https://de.wikipedia.org/wiki/Schubfachprinzip) könnte hilfreich sein.

c) Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion über n. Stellen Sie jeweils explizit eine Induktionsannahme auf und machen Sie im Induktionsschritt deutlich, an welcher Stelle die Induktionsannahme verwendet wird.

i) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\prod_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j+2} = \frac{2}{n+2}$.
Hinweis: $\prod$ ist das Produktzeichen. Es gilt $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2^{2n+1} + 5^{4n+4}$ durch drei teilbar.
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln für Potenzen. Ein Basiswechsel bei der rechten Potenz könnte hilfreich sein.

iii)* Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\sum_{i=1}^{n}(i^3 + i^2 - 2) = \frac{n}{12}\left(3n^3 + 10n^2 + 9n - 22\right)$.

Aufgabe 5.4. *Fliesen verlegen* (3 + 6 = 9 Punkte)

Sie möchten in Ihrer Küche neue Bodenfliesen verlegen und suchen nach einem geeigneten Handwerksbetrieb, dem Sie diese Arbeit anvertrauen können. Dabei stoßen Sie auf ein dubioses Angebot der Firma Easy-Fliesie, das besonders günstig daherkommt. Easy-Fliesie nutzt anstatt normalen 2×2-Fliesen, die vier quadratische Felder (in Einheitsgröße) überdecken, sogenannte L-Fliesen. Die L-Fliesen überdecken jeweils genau drei quadratische Felder (siehe Abbildung 1) und fallen normalerweise als Ausschuss in der Fliesenproduktion an. Die Firma behauptet, unter ausschließlicher Verwendung von L-Fliesen trotzdem jede quadratische Grundfläche fliesen zu können, sofern die Maße der Grundfläche $2^n \times 2^n$ Feldern mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ entsprechen. Dabei behält sie es sich vor, die L-Fliesen zu rotieren. Easy-Fliesie verspricht, dass am Ende der Boden vollständig überdeckt ist und sich keine L-Fliesen überlappen.

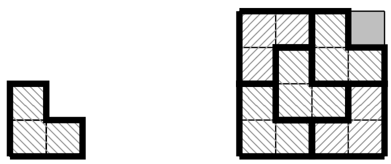


Abbildung 1: Links: Eine L-Fliese. Rechts: Beispielfliesung eines $2^2 \times 2^2$-Grundrisses mit freigelassenem (d.h., nicht überdecktem) Feld in der Ecke oben rechts (grau markiert).

a) Sie fragen sich, ob auf diese Weise tatsächlich der gesamte Boden überlappungsfrei mit L-Fliesen abgedeckt werden kann (schließlich wollen Sie nicht über den Tisch gezogen werden).

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Ein $2^n \times 2^n$-Grundriss lässt sich nicht vollständig und überlappungsfrei mit L-Fliesen fliesen.

Hinweis: Betrachten Sie den Grundriss als Quadrat, das sich aus $2^n \cdot 2^n$ Feldern zusammensetzt.

b) Eventuell kommt das - immerhin günstige - Angebot doch in Frage, wenn Sie nicht auf eine vollständig überdeckende Fliesung des Bodens bestehen.

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Jeder $2^n \times 2^n$-Grundriss kann vollständig und überlappungsfrei mit L-Fliesen gefliest werden, wenn genau ein Feld frei bleiben darf.

Hinweis: Vollständige Induktion nach n. Wie sieht die Induktionsannahme aus?