

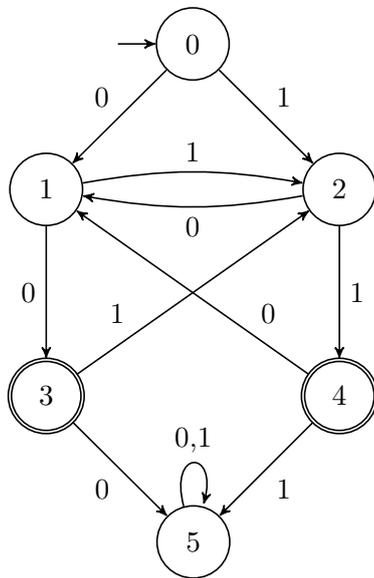
Übungsblatt 10

Ausgabe: 15.01.2024
 Abgabe: 22.01.2024, 23:55 Uhr

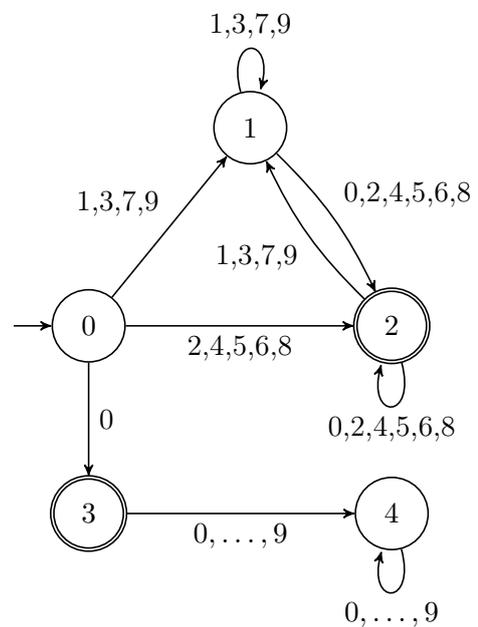
Aufgabe 10.1. Grundlagen von DFAs

(4 + (2 + 3) = 9 Punkte)

a) Gegeben seien die beiden abgebildeten DFAs A_1 und A_2 . Beschreiben Sie die Sprachen $L(A_1)$ sowie $L(A_2)$ umgangssprachlich.



DFA A_1



DFA A_2

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen L_i für $i = \{1, 2\}$ jeweils einen DFA A_i mit möglichst wenigen Zuständen an, sodass $L(A_i) = L_i$ gilt. Eine korrekte graphische Darstellung des jeweiligen DFA genügt. Begründungen sind nicht nötig.

- i) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ enthält eine durch drei teilbare Anzahl an Einsen}\}$.
- ii) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* : w \text{ beginnt mit } a \text{ oder } b \text{ und enthält die Zeichenfolge } cab\}$.

Aufgabe 10.2. Äquivalenzrelationen

((1 + 1 + 1 + 3) + (3 + 1) = 10 Punkte)

a) Sei $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\gamma, \beta)\}$ eine Relation über der Menge $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Geben Sie mit Begründung jeweils eine kleinstmögliche Menge an Paaren aus $A \times A$ an, die zu R hinzugefügt werden muss, damit die resultierende Relation...

- i) ... reflexiv ist.
- ii) ... symmetrisch ist.
- iii) ... transitiv ist.
- iv) ... eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie auch die entstehenden Äquivalenzklassen an.

b) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, gerichteter Graph und seien

- $R_{SZ} := \{(u, v) \in V^2 : u \text{ und } v \text{ liegen in derselben starken Zusammenhangskomponente}\}$
- $R_{\leq} := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$.

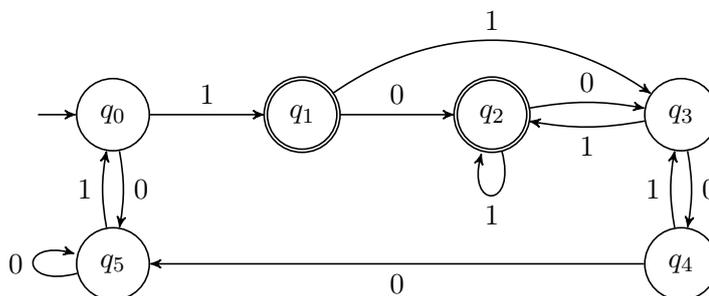
Relationen über V bzw. \mathbb{N} .

- i) Zeigen Sie, dass R_{SZ} eine Äquivalenzrelation über V ist.
- ii) Zeigen Sie, dass R_{\leq} **keine** Äquivalenzrelation über \mathbb{N} ist.

Aufgabe 10.3. Verschmelzungsrelation

((5 + 2 + 2) + (3 + 3) = 15 Punkte)

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A über $\Sigma = \{0, 1\}$.



- i) Begründen Sie die Inäquivalenzen $q_i \not\equiv_A q_j$ für alle $i, j \in \{0, 3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$ bezüglich der Verschmelzungsrelation \equiv_A wie folgt: Geben Sie (ohne Begründung) diejenigen Inäquivalenzen an, für die 1 ein Zeuge ist. Geben Sie für die anderen Inäquivalenzen jeweils einen geeigneten Zeugen mit formaler Begründung an.
 - ii) Geben Sie jeweils einen möglichst kurzen Zeugen an, um die Inäquivalenzen $q_0 \not\equiv_A q_2$ sowie $q_1 \not\equiv_A q_2$ bezüglich der Verschmelzungsrelation \equiv_A zu zeigen. Begründen Sie kurz, weshalb kein kürzerer Zeuge existieren kann.
 - iii) Geben Sie (ohne Begründung) alle Äquivalenzklassen der Verschmelzungsrelation \equiv_A an.
- b) Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA und seien $p, q \in Q$ beliebige Zustände des DFA. Zeigen oder widerlegen Sie:
- i) Wenn $p \not\equiv_A q$, dann gibt es ein $a \in \Sigma$, sodass $\delta(p, a) \not\equiv_A \delta(q, a)$ gilt.
 - ii) Wenn $L(A) = \Sigma^*$ gilt und Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $\widehat{\delta}(q_0, w_1) = p$ sowie $\widehat{\delta}(q_0, w_2) = q$ existieren, dann ist $p \equiv_A q$.

Aufgabe 10.4. Tückischer Automat

(14 + 2 = 16 Punkte)

Nach langer Suche finden Sie einen Getränkeautomaten. In der Auslage erspähen Sie Ihr ersehntes Getränk für 1,50 Euro. Passenderweise haben Sie genau (und ausschließlich) eine 1-Euro- sowie eine 50-Cent-Münze bei sich. Der Automat besitzt genau zwei Einwurfschlitze, je einen für diese beiden Münztypen. Am Automaten entdecken Sie eine Notiz, die seine technischen Tücken offenbart:

- Eine Münze fällt nach Einwurf entlang verschiedener Pfade (siehe Abbildung 1) im Automaten innerhalb eines Röhrensystems herunter und landet schließlich in einem der beiden Behälter A oder B . An den Verzweigungen befinden sich mechanische Klappen s_1 , s_2 , s_3 , die eine eingeworfene Münze entweder in die linke oder die rechte Abzweigung lenken. Wenn eine Münze eine Klappe durchläuft, verändert die Klappe ihre Ausrichtung, sodass die nächste Münze, die die Klappe durchläuft, in die andere Abzweigung gelenkt wird. Die Ausrichtungen der Klappen sind nicht einsehbar.
- Münzen werden nur in Paaren bestehend aus einer 1-Euro- und einer 50-Cent-Münze verarbeitet. Erst wenn beide Münzen nach unten gefallen sind, überprüft der Automat, ob er das Getränk ausgibt oder nicht. Er akzeptiert die Zahlung nur dann, wenn die als Zweites eingeworfene Münze im Behälter B landet. Ansonsten wirft der Automat beide Münzen wieder aus und man kann es erneut versuchen.
- Die Person, die die Notiz verfasst hat, schreibt außerdem, dass sie den Automaten zunächst irgendwie auf Werkseinstellungen habe zurücksetzen können und es danach unter ausschließlich vorschriftsgemäßen Einwürfen einer 1-Euro- sowie einer 50-Cent-Münze geschafft habe, ein Getränk zu bekommen. Danach habe sie den Automaten nicht mehr angerührt.

Die Datierung der Notiz lässt Sie davon ausgehen, dass in der Zwischenzeit auch keine andere Person den Zustand des Automaten verändert hat. Trotz der Tücken bleiben Sie bei Ihrem Ziel, Ihr ersehntes Getränk zu erwerben. Allerdings wollen Sie die Sache mit Köpfchen angehen.

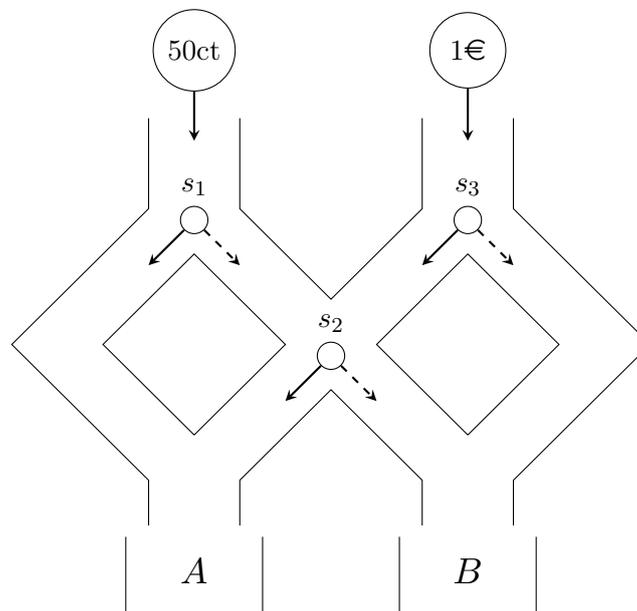


Abbildung 1: Schaubild des Röhrensystems im Zustand *l.v.* Die schwarzen Pfeile zeigen die aktuelle Ausrichtungen der Klappen. Die gestrichelten Pfeile geben die alternative Ausrichtung (*r*) an.

Bitte wenden!

- a) Geben Sie ausgehend von jedem möglichen Startzustand i einen DFA A_i an, der das Verhalten des Getränkeautomaten im Betrieb modellieren könnte. Verwenden Sie dafür das Alphabet $\Sigma = \{E, C\}$, um die Reihenfolge der Münzeinwürfe zu kennzeichnen, wobei E aussagt, dass zuerst die (E)uro- und danach die (C)ent-Münze vorschriftsgemäß eingeworfen wird (Umgekehrtes gilt für C). Verwenden Sie die Zustandsmenge

$$\left\{ s_1 s_2 s_3 . x : s_1, s_2, s_3 \in \{l, r\}, x \in \{a, v\} \right\}$$

wobei der Zustand $ll.v$ ausdrückt, dass alle Klappen die nächste sie durchlaufende Münze jeweils nach (l)inks, d.h., nicht nach (r)echts lenken (wie in Abbildung 1 dargestellt), und das zuletzt eingeworfene Münzen-Paar, das die aktuelle Ausrichtung der Klappen erzeugt hat, (v)erworfen, d.h., nicht (a)kzeptiert wurde.

Stellen Sie Ihre DFAs jeweils graphisch dar. Wählen Sie dabei übersichtliche Darstellungen möglichst ohne kreuzende Kanten. Markieren Sie den jeweiligen Startzustand sowie die akzeptierenden Zustände. Berücksichtigen Sie jeweils nur solche Zustände, die vom Startzustand aus wirklich erreichbar sind, und nur Startzustände, die auf Basis des Inhalts der Notiz wirklich in Frage kommen!

- b) Testweise werfen Sie zunächst Ihre Euro- und im Anschluss Ihre Cent-Münze korrekt ein. Der Automat wirft beide Münzen wieder aus, jedoch kein Getränk.

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben basierend auf Ihrer Modellierung.

- i) Können Sie auf Basis des Testergebnisses mögliche DFAs ausschließen?
- ii) Nach dem erfolglosen Test wollen Sie nun kurzen Prozess machen. In welcher Reihenfolge sollten Sie die Münzen einwerfen, um möglichst schnell Ihr Getränk zu bekommen?