Markoff-Ketten

Definition:

Eine **Markoff-Kette** (G, P) besteht aus einem **gerichteten Graphen** $G(V, E)$ mit $(|V| = n)$ und aus einer **Übergangsmatrix** $P = \{p_{ij}\}_{n \times n}$.

Die Knoten V werden auch **Zustände** genannt.

p_{ij} ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass in einem beliebigen Zeitschritt $t = 0, 1, 2, \ldots,$ **vom Zustand** i **in den Zustand** j **gewechselt** wird.

P ist eine **stochastische Matrix**: Für jeden Eintrag gilt $p_{ij} \geq 0$ und für jede Zeile

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Die Zufallsvariable X_t bezeichne den Zustand der Markoff-Kette im (nach) Zeitschritt t.

Verteilung nach k Schritten

Theorem:

Sei $p_{ij}^{(k)}$ die **Wahrscheinlichkeit**, dass die MK **von Zustand** i **in genau** k **Schritten genau in den Zustand** j kommt. Es gilt

$$p_{ij}^{(k)} = (P^k)_{ij}.$$

$\Rightarrow P^k$ ist die Übergangsmatrix für k Schritte.

Bei Startverteilung $q = [q_1, \ldots, q_n]$ betrachte die **Wahrscheinlichkeit, dass die MK nach** k **Schritten in Zustand** j ist. Diese ist $\Pr[X_k = j]$ und bestimmt durch die j**-te Komponente des Zeilenvektors** $q \cdot P^k$.

$\Rightarrow q \cdot P^k$ ist die Verteilung von X_k bei Startverteilung q.

Random Walk Algorithmus für 2-SAT

Monte Carlo Algorithmus mit einseitigem Fehler:

1. Wähle eine Variablenbelegung B zufällig
2. **repeat**
3. **if** B erfüllt die Formel **then return**(B)
4. Wähle eine beliebige Klausel k_i, die unter B nicht erfüllt ist (es gibt mindestens eine solche Klausel)
5. Wähle zufällig eine Variable aus k_i und flippe ihre Belegung
6. **until** höchstens M Iterationen
7. **return**("nicht erfüllbar")

Random Walk Algorithmus für 3-SAT

Monte Carlo Algorithmus mit einseitigem Fehler:

1. **repeat**
2. Wähle eine Variablenbelegung B zufällig
3. **repeat**
4. **if** B erfüllt die Formel **then return**(B)
5. Wähle eine beliebige Klausel k_i, die unter B nicht erfüllt ist (es gibt mindestens eine solche Klausel)
6. Wähle zufällig eine Variable aus k_i und flippe ihre Belegung
7. **until** höchstens $3n$ Iterationen
8. **until** höchstens M Iterationen
9. **return**("nicht erfüllbar")

Ergodische Markoff-Ketten

Definition:

Die Markoff-Kette (G, P) heisst **ergodisch**, wenn für alle i_1, i_2, j die folgenden **positiven Grenzwerte** existieren und gleich sind:

$$\lim_{t \to \infty} P^t_{i_1,j} = \lim_{t \to \infty} P^t_{i_2,j} > 0.$$

Die **Grenzverteilung** von (G, P) ist gegeben durch

$$\pi^\infty_j = \lim_{t \to \infty} P^t_{i_1,j} \quad .$$

Für eine ergodische Markoff-Kette ist die Matrix

$$P^\infty = \lim_{t \to \infty} P^t$$

wohldefiniert. Jede Zeile ist die Grenzverteilung π^∞.

Für beliebige Startverteilung q ergibt sich $q \cdot P^\infty$.

Stationäre Verteilung

Definition:

Eine Verteilung π' heißt **stationäre Verteilung**, wenn für den Zeilenvektor π' gilt

$$\pi' \cdot P = \pi'.$$

Theorem:

Für jede **ergodische** Markoff-Kette ist ihre Grenzverteilung π^∞ die **einzige stationäre** Verteilung.

Theorem:

Eine Markoff-Kette ist

$$\text{ergodisch} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{irreduzibel und aperiodisch.}$$

Randomisierte Lastbalancierung

Alle Lasteinheiten sind aktiv

for Runde $t = 1, 2, 3, \ldots$ an jedem Knoten v **pardo**

Sei ℓ_v^t die Last von Knoten v in Runde t

if $(\ell_v^t \leq \tau_v)$ **then**

Alle Lasteinheiten auf v werden passiv.

else

v wählt $\ell_v^t - \tau_v$ aktive Lasteinheiten beliebig aus

Alle anderen Einheiten auf v werden passiv

for jede aktive Lasteinheit bei v **pardo**

Wähle uniform zufällig einen Nachbarn von v aus

Schicke dem Nachbarn die Lasteinheit

Analyse Lastbalancierung

Definitionen:

- $H(G) = \max_{u,v \in V} H(u,v)$ die **maximale Hitting-Time** in G.
- ℓ^0 die **Startaufteilung der Lasteinheiten**
- ℓ^t die **Aufteilung der Lasteinheiten** am Ende von Runde t
- $\Phi(\ell)$ die **Anzahl aktiver Einheiten** in ℓ

Theorem:

Das Random-Walk Protokoll erreicht eine balancierte Verteilung nach erwarteter Rundenanzahl von

$$O(H(G) \cdot \log \Phi(\ell^0)).$$

Folgt aus folgenden Lemma:

Sei ℓ^0 eine beliebige Aufteilung der Lasteinheiten. Betrachte die erste Runde T mit $\Phi(\ell^T) \leq \frac{7}{8} \cdot \Phi(\ell^0)$. Dann ist $\mathbb{E}[T] = O(H(G))$.