Effiziente Algorithmen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Martin Hoefer
Daniel Schmand
Martin Ludwig, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen & Komplexität

Übung 5

Ausgabe: 14.05.2019
Abgabe: 21.05.2019, 10:15

Aufgabe 5.1. (3 + 3 Punkte)

Die Werte {Apfel, Banane, Erdbeere, Himbeere, Weintraube} sollen in einer Hash-Tabelle der Größe $m = 4$ untergebracht werden. Es sind die folgenden Hashfunktionen gegeben.

h_1 :	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 2$	Erdbeere $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 1$	Weintraube $\mapsto 4$
h_2 :	Apfel $\mapsto 3$	Banane $\mapsto 4$	Erdbeere $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Weintraube $\mapsto 4$
h_3 :	Apfel $\mapsto 2$	Banane $\mapsto 2$	Erdbeere $\mapsto 4$	Himbeere $\mapsto 1$	Weintraube $\mapsto 1$
h_4 :	Apfel $\mapsto 1$	Banane $\mapsto 3$	Erdbeere $\mapsto 3$	Himbeere $\mapsto 4$	Weintraube $\mapsto 4$

---

h_5 :	Apfel $\mapsto 1$	Banane $\mapsto 1$	Erdbeere $\mapsto 3$	Himbeere $\mapsto 2$	Weintraube $\mapsto 3$
h_6 :	Apfel $\mapsto 2$	Banane $\mapsto 4$	Erdbeere $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Weintraube $\mapsto 4$
h_7 :	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 4$	Erdbeere $\mapsto 1$	Himbeere $\mapsto 4$	Weintraube $\mapsto 2$
h_8 :	Apfel $\mapsto 3$	Banane $\mapsto 1$	Erdbeere $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Weintraube $\mapsto 3$
h_9 :	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 2$	Erdbeere $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 2$	Weintraube $\mapsto 3$

In der Vorlesung haben die Definition von c-universellen Hashfunktionen kennengelernt.

a) Gebe für die Familie $\mathcal{H}_1 = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ das kleinste c an, sodass $\mathcal{H}_1$ c-universell ist. Begründe deine Antwort.

b) Finde eine möglichst kleine, nichtleere Familie $\mathcal{H}_2 \subseteq \{h_5, h_6, h_7, h_8, h_9\}$, die 1-universell ist. Begründe deine Antwort.

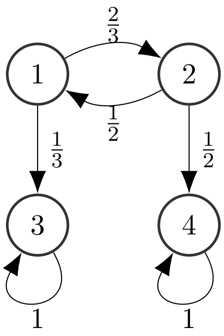
Bitte wenden!

Aufgabe 5.2. (3 + 3 Punkte)

Der Startzustand dieser Markoff-Kette sei der Zustand 1 (mit Wahrscheinlichkeit 1).

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Markoff-Prozess den Zustand 3 erreicht.

b) Bestimme die erwartete Anzahl an Schritten, bis der Markoff-Prozess in einen der Zustände $\{3, 4\}$ gelangt.



Aufgabe 5.3. (4 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass der randomisierte Algorithmus zum Bestimmen aller Zusammenhangskomponenten eines Graphen mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 1 - \frac{1}{n}$ nach $5 \log n$ Schleifendurchläufen terminiert.

Wir möchten nun für einen allgemeinen Algorithmus, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \frac{1}{n}$ nach C Schritten terminiert, folgende Strategie anwenden. Falls der Algorithmus nicht nach C Schritten beendet ist, starte ihn neu und beginne die Berechnung von vorn. Berechne die erwartete Anzahl an Schritten bis der Algorithmus terminiert. (Der algorithmische Overhead zum Zählen der Schritte und zum Durchführen des Neustarts kann hier vernachlässigt werden.)

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} p^k(k+1) = \frac{1}{(1-p)^2}$ für alle $0 < p < 1$.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/ea/sommer19/ea19.shtml`

E-Mail: `{mhoefer,schmand}@em.uni-frankfurt.de`