Effiziente Algorithmen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Martin Hoefer
Daniel Schmand
Martin Ludwig, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
Algorithmen & Komplexität

Übung 6

Ausgabe: 21.05.2019
Abgabe: 28.05.2019, 10:15

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

Entwerfe eine irreduzible Markov-Kette mit 10 Knoten und Periode 5 für jeden Knoten.

Aufgabe 6.2. (3+3+3 Punkte)

Beim 3-Färbungsproblem soll jedem Knoten eines Graphen eine von 3 Farben zugeordnet werden, sodass folgendes gilt: Für jede Kante $\{u, v\}$ im Graphen haben die Knoten u und v verschiedene Farben. Betrachte den folgenden randomisierten Algorithmus zum Berechnen einer 3-Färbung in einem 3-färbbaren Graphen:

1. Weise jedem Knoten eine der 3 Farben beliebig zu. Dies muss keine zulässige 3-Färbung sein.
2. Solange es eine Kante $\{u, v\}$ gibt, bei der u und v die gleiche Farbe haben:
   (1) Wähle uniform zufällig u oder v aus.
   (2) Ändere die Farbe des gewählten Knotens in eine, die der Knoten aktuell nicht hat. Jede der beiden möglichen Farben wird mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gewählt.

Fixiere eine zulässige 3-Färbung $\mathcal{F}$.

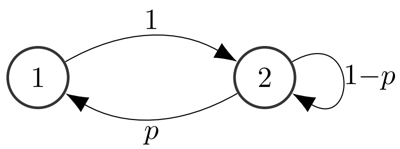
a) Beschreibe eine Markovkette mit $n + 1$ Zuständen, bei der der Zustand i genau dem Zustand des Algorithmus entspricht, i Knoten identisch zu $\mathcal{F}$ gefärbt zu haben. Nehme für die Wahl der Übergangswahrscheinlichkeiten den worst-case an (analog zum Beweis des randomisierten 2-SAT Algorithmus). Begründe deine Wahl der Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Sei h_j die erwartete Anzahl an Schritten, um von Zustand j in Zustand n zu gelangen. Zeige mit Hilfe von a): $h_j = 2^{j+1} + 4 \sum_{i=0}^{j-1} 2^i + h_{j+1}$ für alle $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

c) Zeige mit Hilfe von b), dass die erwartete Anzahl an Schleifendurchläufen des Algorithmus durch $6 \cdot 2^n - 4n - 6$ beschränkt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)



Bestimme alle **stationären** Verteilungen dieser Markoff-Kette für alle möglichen Werte von $p \in [0, 1]$.